



آرمین بلغار

تاریخ آزمون:

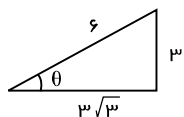
زمان برگزاری: ۷۵ دقیقه

کد اجرا: ۱۰۲۱

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فصل ۲ دهم

۱- فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار $\tan \theta$ را بدست آورید.



۲- در مثلث زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید همچنین، اندازه زاویه‌ی θ را مشخص کنید.

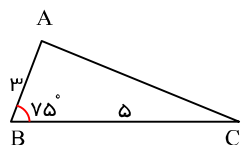
۳- مقایسه کنید:

۱) $\sin 75^\circ \square \sin 85^\circ$

۲) $\cos 40^\circ \square \cos 32^\circ$

۳) $\cos 30^\circ \square \sin 60^\circ$

۴) $|\sin 123^\circ| \square |\sin 321^\circ|$



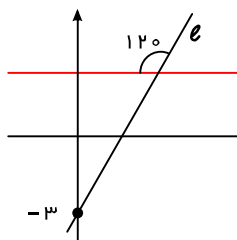
۴- فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.

۵- درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \tan \alpha$$

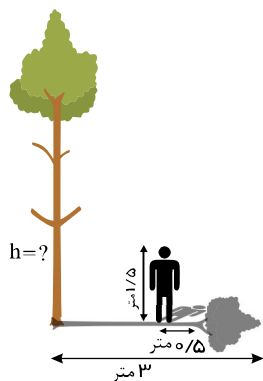
۶- در یک لوزی به طول ضلع $2\sqrt{3}$ ، تانژانت زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر $-\sqrt{3}$ است. مساحت این لوزی چند متر مربع است؟

۷- فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی α را به‌دست آورید.



۸- با توجه به شکل زیر، معادله‌ی l را به‌دست آورید.

۹- علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱٫۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰٫۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟

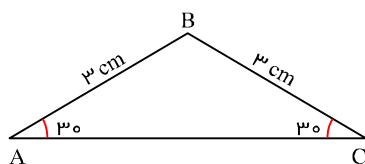


۱۰- دو خط L_1 و L_2 یکدیگر را با چه زاویه‌ای قطع می‌کنند؟

$$L_1 : \sqrt{3}x - 1$$

$$L_2 : -x + 7$$

۱۱- مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



۱۲- اگر داشته باشیم $\sin \theta \cot \theta < 0$ و $\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} < 0$ ، آنگاه θ در کدام ربع است؟

۱۳- با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

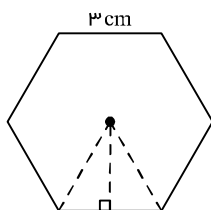
$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

۱۴- مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



۱۵- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$۲ \sin^2 ۳۰^\circ + ۴ \cos^2 ۳۰^\circ - ۲ \cos^2 ۶۰^\circ =$$

ب

$$\frac{\tan ۶۰^\circ \times \tan ۴۵^\circ}{۲ \cot ۳۰^\circ} =$$

پ

$$\frac{۳ \sin^2 ۳۰^\circ - ۲ \tan ۴۵^\circ}{\sin^2 ۶۰^\circ + \cos^2 ۶۰^\circ} =$$

ت

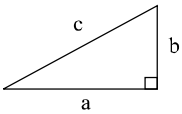
$$\sin ۳۰^\circ \times \cos ۴۵^\circ - \tan ۰^\circ \sin^2 ۴۵^\circ =$$

ث

$$\left(\frac{۱}{\cos ۶۰^\circ}\right)^2 - \tan^2 ۶۰^\circ + ۳ \sin ۹۰^\circ - \cos^2 (۱۸۰^\circ) =$$

ج

$$\tan ۴۵^\circ - ۲ \sin ۹۰^\circ \cos^2 ۴۵^\circ + \cos ۹۰^\circ$$



۱۶- در مثلث روبرو اگر $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۱۷- درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

پاسخنامه تشریحی

- ۱

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{24}{49} = \frac{25}{49}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{7}$$

از آنجا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:

$$\cos \theta = -\frac{5}{7} \rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{-\frac{5}{7}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

- ۲

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

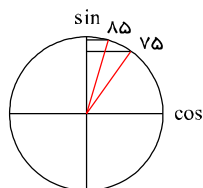
$$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

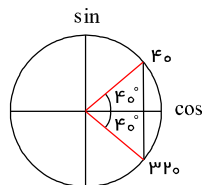
$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

باتوجه به مقادیر بدست آمده، اندازه زاویه θ ، 30° است.

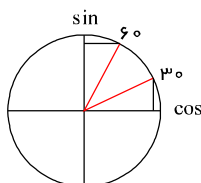
۳- باتوجه به دایره مثلثاتی داریم:



$$\sin 85^\circ > \sin 75^\circ \quad (1)$$

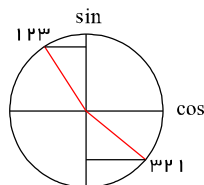


$$\cos 40^\circ = \cos 32^\circ \quad (2)$$



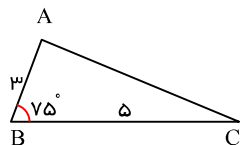
$$\sin 6^\circ = \cos 30^\circ \quad (3)$$

سینوس و کسینوس زوایای متمم با هم برابرند.



$$\sin 123^\circ > \sin 321^\circ \quad (4)$$

-4



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \quad \text{می دانیم:}$$

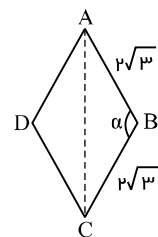
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{96}{100} = 7.2 \text{ cm}^2$$

-5

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

-6

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= -\sqrt{3} \Rightarrow 1 + \underbrace{\tan^2 \alpha}_3 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$S_{\text{لوزی}} = 2 \times S_{\triangle ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{7- می دانیم:}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow[\sin \alpha > 0]{\alpha \text{ ربع دوم}} \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{4}$$

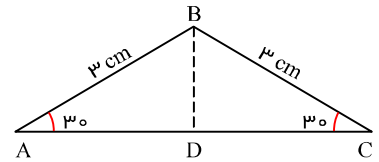
شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

8- می‌دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{3} \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times BC \times CD \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{18\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

- ۱۲

$$\sin \theta \times \cot \theta < 0 \Rightarrow \cancel{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cancel{\sin \theta}} < 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} < 0 \xrightarrow{\text{همواره مثبت } \cos^2 \theta} \sin \theta < 0$$

از منفی بودن سینوس و کسینوس نتیجه می‌شود θ در ربع سوم واقع است.

- ۱۳

الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$

ب) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta}$

$$= \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

پ) $\frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

ت) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + (1 - \cos^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x}$

$$= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x$$

ث) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

هر ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است

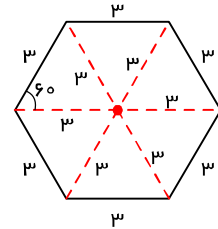
$$\theta = \frac{(n-2)}{n} \times 180$$

۱۴- می‌دانیم:

$$S_{\text{مثلث}} \times 6 = S_{\text{ضلعی ۶}}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{ضلعی ۶}} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



۱۵-

الف

$$2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} = 3$$

ب

$$\frac{\sqrt{3} \times 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

پ

$$\frac{3\left(\frac{1}{4}\right) - 2(1)}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4} - 2}{1} = \frac{3-8}{4} = \frac{-5}{4}$$

ت

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 \times \left(\frac{2}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ث

$$(4) - (3) + 3(1) - (1) = 3$$

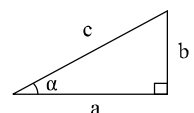
ج

$$1 - 2(1)\left(\frac{2}{4} + 0\right) = 0$$

۱۶- با در نظر گرفتن زاویه‌ی بین ضلع a و c بعنوان زاویه‌ی α داریم:

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{3} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = 9 \rightarrow \cot^2 \alpha = 8 \rightarrow \cot \alpha = \sqrt{8} = \frac{a}{b}$$



۱۷-

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right)}$$

$$= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$