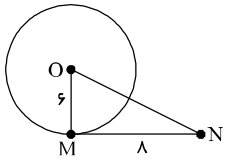
کد اجرا: ۸۹۱ | تاریخ آزمون:

نام و نام خانوادگی: | زمان پیشنهادی: ۵۰ دقیقه

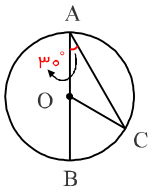
نام آزمون: ریاضی هشتم فصل ۹ | آرمین بلغار

۱- در شکل مقابل O مرکز دایره و OM شعاع دایره است. اندازه‌ی ON را بیابید.



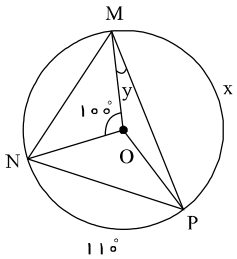
۲- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازهٔ زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\hat{C} = \cdots \quad , \quad C\hat{O}B = \cdots \quad , \quad BC = \cdots$$



۳- از نقطهٔ C بیرون دایرهٔ مماس بر دایره رسم کنید. نقطهٔ تماس را A بنامید. اگر شعاع دایره ۸ باشد و فاصلهٔ C تا مرکز ۱۲ سانتی‌متر باشد، با رسم شکل اندازهٔ مماس AC را مشخص کنید.

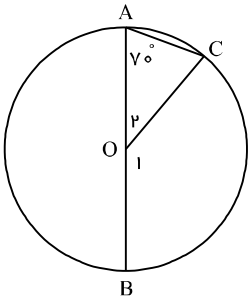
۴- در شکل زیر مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.



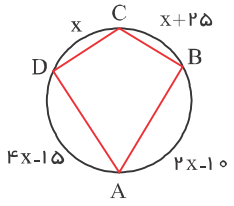
$$P\hat{x}M =$$
$$\hat{y} =$$
$$\hat{O} =$$

۵- در شکل مقابل O مرکز دایره است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$\hat{O} =$$
$$\hat{C} =$$
$$\overset{\frown}{BC} =$$
$$\overset{\frown}{AC} =$$

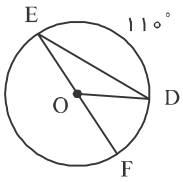


۶- در شکل زیر اندازهٔ کمان AB کدام است؟



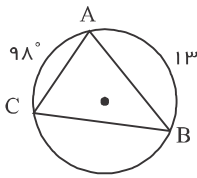
۷ - با توجه به شکل‌های زیر اندازهٔ کمان‌ها و زاویه‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید.

الف)



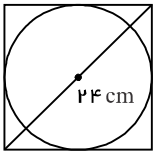
$\begin{cases} \hat{E} = \\ \overset{\frown}{DF} = \end{cases}$

ب)

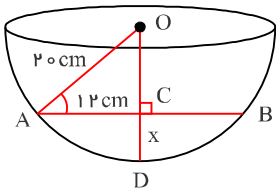


$\begin{cases} \overset{\frown}{BC} = \\ \hat{C} = \end{cases}$

۸ - کاغذی مربعی‌شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.

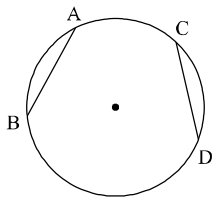


۹ - در کاسهٔ کروی روبه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم، $\overline{AB}$ برابر ۲۴ سانتی‌متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟



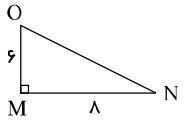
۱۰ - قطر دایره‌ای ۸ سانتی‌متر و فاصلهٔ مرکز تا خط ۴ سانتی‌متر است. خط و دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

الف **اگر در دایره‌ای دو وتر $\bar{AB}, \bar{CD}$ مساوی باشند. ثابت کنید کمان‌های نظیر باهم برابرند:**



پاسخنامه تشریحی

۱ - با توجه به اینکه OM (شعاع دایره) بر پاره‌خط مماس MN عمود است. مثلث $\overset{\Delta}{OMN}$ قائم‌الزاویه است و با توجه به رابطهٔ فیثاغورس ON که وتر است را به‌دست می‌آوریم.



$$ON^۲ = OM^۲ + MN^۲ \Rightarrow ON^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۳۶ + ۶۴$$

$$\Rightarrow ON^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ON = \sqrt{۱۰۰} \Rightarrow ON = ۱۰$$

۲ - روش اول)

با توجه به اینکه مثلث AOC متساوی‌الساقین است. بنابراین:

$\overset{\frown}{BC}$ کمان روبه‌روی زاویهٔ محاطی A است و کمان روبه‌روی زاویه مرکزی $C\hat{O}B$ پس:

$$\hat{C} = ۳۰^\circ \qquad BC = ۶۰^\circ \qquad C\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

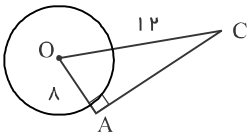
روش دوم) زاویهٔ COB، زاویهٔ خارجی متناظر با رأس O در مثلث AOC است. $\hat{C} = \hat{A} = ۳۰^\circ \rightarrow$

$$C\hat{O}B = \hat{A} + \hat{C} = ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

و چون کمان BC روبه‌روی زاویهٔ مرکزی COB است داریم:

$$\overset{\frown}{BC} = C\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

۳ - یک مثلث قائم‌الزاویه است از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:



$$OC^۲ = OA^۲ + AC^۲$$
$$۱۲^۲ = ۸^۲ + AC^۲$$
$$۱۴۴ - ۶۴ = AC^۲ \rightarrow AC^۲ = ۸۰$$
$$AC^۲ = \sqrt{۱۶ \times ۵} \rightarrow AC = ۴\sqrt{۵}$$

۴ - کمان $\overset{\frown}{MN}$ روبه‌روی زاویهٔ مرکزی ۱۰۰° است و کمان $\overset{\frown}{NP}$روبه‌روی زاویهٔ مرکزی ۱۱۰° است پس $\begin{cases} \overset{\frown}{MN} = ۱۰۰^\circ \\ \overset{\frown}{NP} = ۱۱۰^\circ \end{cases}$ بنابراین داریم:

$$M\hat{O}P = ۳۶۰^\circ - (۱۰۰ + ۱۱۰)^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{PxM} = ۱۵۰^\circ$$

ملث MOP متساوی‌الساقین است بنابراین $\Leftarrow$

$$y = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

زاویهٔ $N\hat{O}P$ روبه‌روی کمان ۱۱۰° است، بنابراین $\Leftarrow$

$\hat{O} = N\hat{O}P = ۱۱۰^\circ$ زاویهٔ مرکزی

۵ - $\overset{\frown}{BC}$ کمان مقابل زاویهٔ محاطی $\hat{A} = ۷۰^\circ$ است، پس اندازهٔ آن دو برابر است. $\hat{O}_۱$ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی کمان $\overset{\frown}{BC}$ است و برابر است.

$$\overset{\frown}{BC} = ۲ \times ۷۰ = ۱۴۰ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۴۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ \quad \hat{O}_۲ = ۴۰^\circ \quad \hat{C} = ۷۰^\circ$$

۶ -

$\overset{\frown}{AB}=?$

$(x+۲۵)+(۲x-۱۰)+(۴x-۱۵)+x=۳۶۰^\circ$

$۸x-۲۵+۲۵=۳۶۰^\circ \rightarrow ۸x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۴۵^\circ \rightarrow$ اکنون x را در مقدار کمان $\overset{\frown}{AB}$ قرار می‌دهیم

$\overset{\frown}{AB}=۲x-۱۰=۲(۴۵)-۱۰=۸۰^\circ$

۷ - الف) $\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{DF}}{۲}=\frac{۱۸۰-۱۱۰}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ \leftarrow \overset{\frown}{DF}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{ED}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ \rightarrow$ زاویهٔ محاطی

ب)

$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-(۹۸^\circ+۱۳۵^\circ)=۳۶۰^\circ-(۲۳۳^\circ)=۱۲۷^\circ$

زاویهٔ محاطی $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۳۵^\circ}{۲}=۶۷٫۵^\circ$

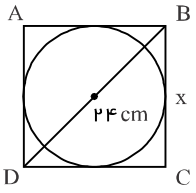
۸ - فرض می‌کنیم طول ضلع مربع، برابر با x باشد، بنابراین:

طول ضلع مربع $=\overline{AB}=\overline{AD}=x$

اکنون مثلث قائم‌الزاویه BAD را در نظر بگیرید و با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$\overline{BD}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{AD}^۲ \Rightarrow ۲۴^۲=x^۲+x^۲ \Rightarrow ۵۷۶=۲x^۲$

$x^۲=۲۸۸ \Rightarrow x=\sqrt{۲۸۸}=\sqrt{۱۴۴\times ۲}=۱۲\sqrt{۲}cm$



بنابراین قطر دایره برابر $۱۲\sqrt{۲}$ است.

۹ - چون OC از مرکز دایره می‌گذرد و بر وتر یعنی همان سطح آب عمود است آن را نصف می‌کند:

$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{۲}=\frac{۲۴}{۲}=۱۲cm$

AOC مثلث قائم‌الزاویه $\rightarrow OA^۲=OC^۲+AC^۲ \Rightarrow ۲۰^۲=OC^۲+۱۲^۲ \Rightarrow OC^۲=۲۰^۲-۱۲^۲$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$\Rightarrow OC^۲=۴۰۰-۱۴۴=۲۵۶ \Rightarrow OC=۱۶cm$

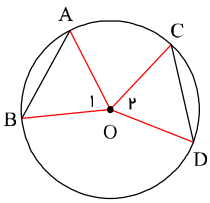
از طرفی $OA=OD$ شعاع نیم‌دایره

$\overline{OD}=\overline{OC}+x \Rightarrow ۲۰=۱۶+x \Rightarrow x=۴cm \Leftarrow$ حداکثر عمق آب

۱۰ - شعاع دایره ۴ سانتی‌متر است و فاصلهٔ مرکز تا خط نیز ۴ سانتی‌متر است پس خط بر دایره مماس است و در یک نقطه با دایره برخورد دارد.

الف

$\left.\begin{array}{l} AC=OA \text{ شعاع} \\ AB=AD \text{ شعاع} \\ AB=CD \text{ فرض مسئله} \end{array}\right\} \rightarrow$ دو مثلث در حالت سه ضلع باهم همنهشت هستند



بنابراین اجزای متناظر نیز با هم برابرند:

اجزای متناظر : $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$, $\Rightarrow$, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$