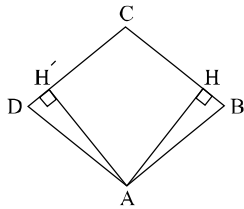
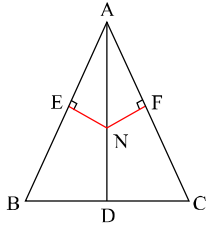




۱- مثلث  $ABC$  به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ و مثلث  $DEF$  به ضلع  $x - 1$  و  $10$  و  $x + 7$  با هم متشابه هستند (اندازه‌ها از کوچک به بزرگ نوشته شده) مقدار  $x$  را بیابید.



۲- چهارضلعی  $ABCD$  لوزی است. ثابت کنید دو مثلث  $AHB$  و  $AH'D$  هم‌نهشت هستند.



۳- در شکل زیر  $AD$  نیمساز  $A$  است. ثابت کنید  $AE = AF$

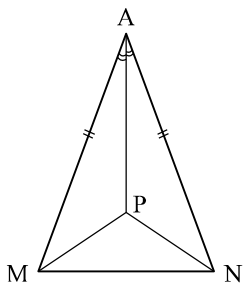
۴- ثابت کنید در هر مستطیل قطرها با یکدیگر برابرند. (فرض و حکم را بنویسید).

۵- دو لوزی زمانی متشابه‌اند که یک زاویه برابر داشته باشند.

درست  نادرست

۶- در شکل مقابل چرا  $PMN$  متساوی‌الساقین است؟

( $AP$  نیمساز زاویه  $A$  است.)



۷- ثابت کنید در مربع قطرها نیمساز است.

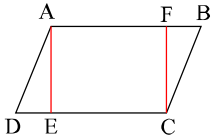
۸- آیا استدلال زیر درست است؟ چرا؟

در هر مربع، تمامی اضلاع با هم برابرند. ← همهٔ اضلاع  $ABCD$  با هم برابر نیستند. چهار ضلعی  $ABCD$  مربع نیست.

۹- ثابت کنید در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است.

۱۰- ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

۱۱- در متوازی الاضلاعی ارتفاع های  $AE$  و  $CF$  رسم شده اند. می خواهیم ثابت کنیم  $DE = FB$ . فرض و حکم را بنویسید.

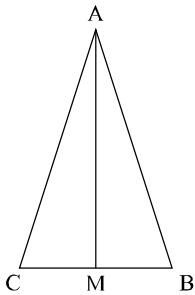


۱۲- در هر مورد نشان دهید آیا نتیجه ای که از مفروضات مشخص شده، گرفته شده درست است یا نادرست؟ دلیل پاسخ نادرست را بنویسید.

الف.  $ABCD$  لوزی است.  $\Rightarrow$  هر لوزی یک متوازی الاضلاع است. چهارضلعی  $ABCD$  متوازی الاضلاع است.

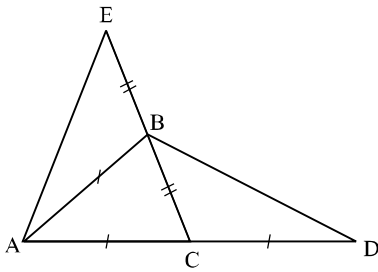
ب.  $ABCD$  مستطیل نیست.  $\Rightarrow$  در هر مستطیل زاویه ها باهم برابرند. در چهارضلعی  $ABCD$  زاویه ها برابر نیستند.

۱۳- در مثلث متساوی الساقین  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $A$  را رسم کرده ایم. ثابت کنید  $AM$  میانه است.

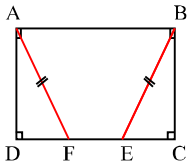


۱۴- مقیاس یک نقشه  $\frac{1}{200}$  است. فاصله دو نقطه روی نقشه  $4,5$  سانتی متر است. فاصله این دو نقطه در واقعیت چقدر است؟

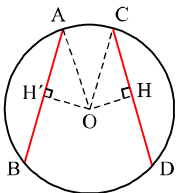
۱۵- در شکل مقابل اثبات کنید دو مثلث هم‌نهشت وجود دارد.



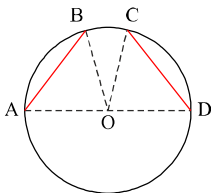
۱۶- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. (اردبیل - خرداد ۹۵)



۱۷- در شکل زیر دوزنقه  $AFEB$  متساوی‌الساقین است. ثابت کنید  $DF = EC$ .



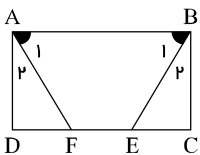
۱۸- ثابت کنید فاصله دو وتر مساوی در یک دایره، از مرکز دایره برابر است.



۱۹- ثابت کنید اگر وترهایی در دایره با هم برابر باشند کمان‌های نظیر آنها با هم برابر است.

۲۰- در اثبات زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

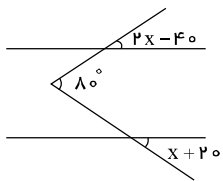
«در مستطیل  $ABCD$ ، پاره‌خط‌های  $AF$  و  $BE$  طوری رسم شده که دو زاویه  $A_1$  و  $B_1$  برابرند. ثابت کنید  $AF$  و  $BE$  مساوی هستند.»



اثبات: چون  $\hat{A}_1 + \hat{A}_\gamma = 90^\circ$  و  $\hat{B}_1 + \hat{B}_\gamma = 90^\circ$  و  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  بنابراین:  $\hat{A}_\gamma = \hat{B}_\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_\gamma = \hat{B}_\gamma \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بنایه حالت } (\dots\dots\dots)} \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

۲۱- چند درجه است  $x$ ؟

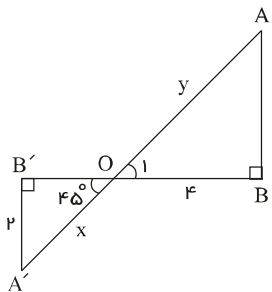


۲۲- در شکل زیر:

الف) اندازه زاویه‌های  $A$  و  $A'$  چند درجه است؟

ب) مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید. (به کمک فیثاغورس)

ج) آیا دو مثلث  $AOB$  و  $A'OB'$  متشابه‌اند؟ چرا؟



## پاسخنامه تشریحی

۱- با توجه به دو ضلع ۵ و ۱۰ نسبت تشابه  $\frac{۵}{۱۰}$  یا  $\frac{۱}{۲}$  است، اکنون کافیست نسبت تشابه برای دوضلعی که یکی از آنها مجهول است را برابر این نسبت تناسب قرار دهیم. داریم:

$$\frac{۴}{x-1} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 = x - 1 \Rightarrow x = 9$$

۲- در لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند. همچنین اضلاع لوزی با یکدیگر برابر می‌باشند؛ پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{D} \text{ لوزی است} \\ AB = AD \text{ ضلع لوزی} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز}} AHB \cong AH'D$$

توجه داشته باشید که حالت هم‌نهشتی «ض ض ز» در مثلث قائم‌الزاویه همان حالت «وتر و یک زاویه حاده» است. بنابراین به جای «ض ض ز» می‌توانستیم بگوییم «وتر و یک زاویه حاده».

۳-

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ نیمساز } AD \\ AN = AN \text{ مشترک} \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{بنا به حالت}} \\ \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \end{array} \triangle AEN \cong \triangle AFN$$

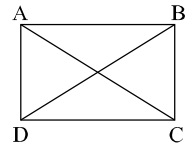
$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AE = AF$$

۴-

فرض:  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$  حکم:  $AC = BD$

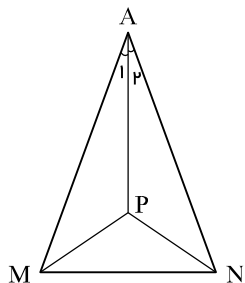
$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ AB = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض)}} \triangle ADB \cong \triangle ABC \Rightarrow AC = BD$$

اجزای متناظر برابرند  $AC = BD$



۵- درست، چون در لوزی زاویه‌های روبه‌رو به هم با هم برابرند وقتی یکی از زاویه‌ها با هم برابر باشد پس زاویه‌های دیگر نیز برابرند.

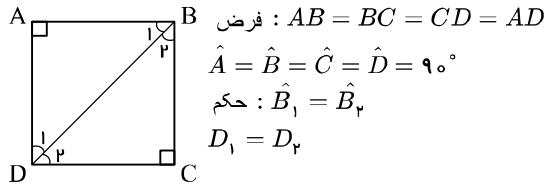
۶-



فرض:  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, AM = AN$  (نیمساز زاویه A)  
حکم:  $MP = NP$

$$\left. \begin{array}{l} AP = AP \text{ مشترک} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ فرض} \\ AM = AN \text{ متساوی الساقین} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle MAP \cong \triangle NAP \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MP = NP$$

۷- ثابت می‌کنیم دو مثلث  $\triangle BCD$  و  $\triangle ABD$  هم‌نهشت هستند.



فرض :  $AB = BC = CD = AD$   
 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$   
 حکم :  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$   
 $D_1 = D_2$

$$\left. \begin{array}{l} AB = BC \\ AD = CD \\ \text{مشترک } BD = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABD \cong \triangle BCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{array} \right.$$

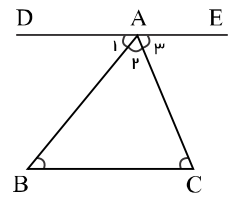
پس از برابری  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$  می‌شود نتیجه گرفت که  $BD$  نیمساز است. زاویه  $D$  نیز همین‌طور  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ .

۸ - خیر. زیرا  $ABCD$  اگر لوزی باشد چهار ضلعش با هم برابرند و مربع نیست؛ پس استدلال غلط است.

- ۹

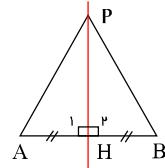
$$\text{حکم: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

خط  $DE$  را موازی  $BC$  از نقطه  $A$  رسم می‌کنیم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{A}_2 = \hat{C} \end{array} \right. \quad \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{A}_3 + \hat{C} = 180^\circ$$

۱۰ - به شکل زیر توجه کنید:



- ۱۱

فرض:  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع و  $AE$  و  $CF$  ارتفاع

حکم:  $DE = FB$

۱۲ - الف. نادرست؛  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است و می‌تواند هریک از اشکال مستطیل، لوزی، مربع یا خود متوازی‌الاضلاع باشد و الزاماً یک لوزی نیست.

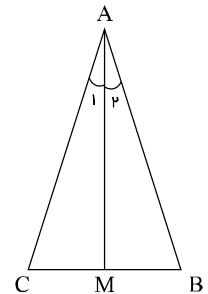
ب. درست، چون زاویه‌های مثلث  $ABC$  برابر نیستند و زاویه‌های مستطیل برابرند پس مستطیل نیست.

- ۱۳

$AM$  نیمساز  $A_1 = A_2$   
 ضلع مشترک  $AM$   
 مثلث متساوی‌الساقین  $AB = AC$

در حالت ض ض ض  $\Rightarrow ABM \cong ACM$

$AM$  میانه  $\Rightarrow M$  وسط  $BC \Rightarrow BM = CM \Rightarrow$  بنابراین اجزای متناظر هم، با یکدیگر برابرند



- ۱۴

در نقشه  $\frac{1}{200} = \frac{4.5}{x}$

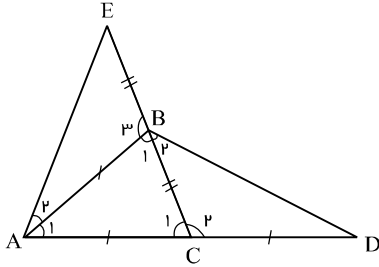
در واقعیت  $\frac{1}{200} = \frac{4.5}{x}$

فاصله این دو نقطه در واقعیت سانتی‌متر  $x = 4.5 \times 200 = 900$

- ۱۵

$$AB = AC \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_\nu &= 180^\circ - \hat{B}_1 \\ \hat{C}_\nu &= 180^\circ - \hat{C}_1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1)} \hat{B}_\nu = \hat{C}_\nu \quad (2)$$

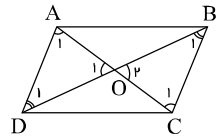


$$\left. \begin{aligned} CD &= AB \text{ (فرض سوال)} \\ CB &= BE \text{ (فرض سوال)} \\ \hat{C}_\nu &= \hat{B}_\nu \text{ (2)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle BCD \cong \triangle ABE$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} BD = AE \\ \hat{B}_\nu = \hat{E} \\ \hat{D} = \hat{A}_\nu \end{cases}$$

- 16

$$\text{فرض: } \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases} \quad \text{حکم: } \begin{cases} AO \parallel OC \\ BO \parallel OD \end{cases}$$



$$\left. \begin{aligned} AD \parallel BC, BD \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ AB \parallel DC, AC \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AD = BC \text{ ضلع‌های روبه‌روی متوازی‌الاضلاع با هم برابرند.} & \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ز)}} \triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow \text{اجزای متناظر} \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \end{cases}$$

نکته: هر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های تند آن با هم برابر هستند.

۱۷ - اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم  $\triangle AFD$  و  $\triangle BEC$  هم‌نهشت هستند:

چهارضلعی که همه زاویه‌های آن قائمه هستند مستطیل است. پس:  $AD = BC$  (در مستطیل، ضلع‌های روبه‌رو برابرند)

$$\left. \begin{aligned} AF = BE \text{ : دوزنقه } AFEB \text{ متساوی الساقین (فرض مسئله)} \\ AD = BC \text{ : عرض مستطیل} \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ADF \cong \triangle BCE$$

$$\xrightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} DF = EC$$

۱۸ - ارتفاع وارد بر وتر عمودمنصف وتر است.

$$\left. \begin{aligned} OA = OC \\ AH' = CH \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{شعاع} \\ \text{فرض} \end{array} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH' \cong \triangle COH$$

$$\rightarrow OH = OH'$$

۱۹ - باید اثبات کنیم  $\triangle OBA$  و  $\triangle OCD$  هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{aligned} CD = BA \text{ فرض} \\ AO = OB \text{ شعاع} \\ OC = OB \text{ شعاع} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle OBA \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر نیز برابرند}} \hat{O}_1 = \hat{O}_\nu \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

چون دو زاویه مرکزی  $\hat{O}_\nu$  و  $\hat{O}_1$  برابرند پس کمان روبه‌رویشان نیز با هم برابر است.

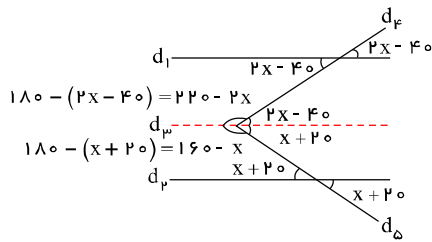
- ۲۰

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_\nu = \hat{B}_\nu \\ AD = BC \text{ عرض مستطیل} \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle ADF \cong \triangle BCE \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BE = AF$$

- ۲۱

خط فرضی  $d_p$  را موازی دو خط  $d_1$  و  $d_p$  رسم می‌کنیم.

خط  $d_p$  خط مورب برای دو خط موازی  $d_1$  و  $d_p$  است، همچنین خط  $d_\delta$  خط مورب برای دو خط موازی  $d_p$  و  $d_\delta$  است.



$$2x - 40 + x + 20 = 3x - 20 = 180 \Rightarrow x = \frac{200}{3}$$

(۲۲ - الف)

$$\hat{B}' + 45^\circ + \hat{A}' = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B}'=90^\circ} 90^\circ + 45^\circ + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}' = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}' = 45^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = 45^\circ$$

(ب) از اینکه دو زاویه برابر در هر مثلث وجود دارد نتیجه می‌شود مثلث، متساوی‌الساقین است. یعنی:

$$B'A' = B'O = 2 \Rightarrow x^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 \Rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BO = AB = 4 \Rightarrow y^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 \Rightarrow y = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

(ج) سه زاویه در هر مثلث نظیر به نظیر برابرند، حال نسبت اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{2} \quad \frac{OA'}{OA} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

نسبت اضلاع نیز با هم برابر است. بنابراین دو مثلث متشابه‌اند.