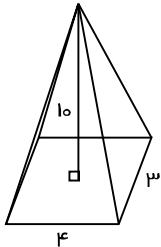




۱- حجم هرمی به ارتفاع ۱۲ سانتی متر که قاعدهٔ هرم، مثلثی با قاعده و ارتفاع ۶ و ۴ سانتی متر است را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی)



۲- حجم شکل زیر را به دست آورید.

۳- حجم نیم کره‌ای به شعاع R از کدام دستور به دست می‌آید؟

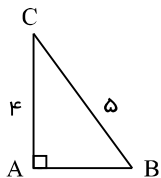
(۴) $\frac{2}{3}\pi R^3$

(۳) $\frac{4}{3}\pi R^3$

(۲) $4\pi R^2$

(۱) $2\pi R^2$

۴- حجم حاصل از دوران مثلث زیر حول ضلع AB کدام است؟



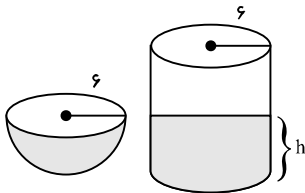
(۲) 12π

(۱) 10π

(۴) 20π

(۳) 16π

۵- پیمانه‌ای به شکل نیمکره و به شعاع دهانهٔ ۶ سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوان استوانه‌ای شکل به شعاع قاعدهٔ ۶ سانتی متر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ ($\pi = 3$)



۶- به سؤالات زیر پاسخ دهید:

جمله‌های درست را با (\checkmark) و جمله‌های نادرست را با (\times) مشخص کنید.

(a) حجم‌های هندسی به سه دسته تقسیم می‌شوند: منشوری، هرمی و کروی.

(b) استوانه از دوران مستطیل حول ضلع آن به دست می‌آید.

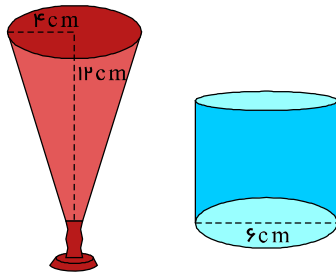
(c) خط‌های $y = x + 1$ و $y = 2x + 1$ و $y = -x + 1$ دارای شیب مساوی هستند.

(d) درجهٔ عبارت مقابل نسبت به x برابر با ۲ است.

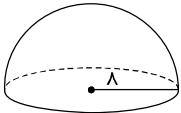
$$-3y^3x^2 - 4bxy^2 + 6ax^3y$$

الف

۷- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه 4 cm و به ارتفاع 12 cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل که قطر قاعده آن 6 cm است، خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟



۸- می‌خواهیم یک نیم‌کره چوبی توپُر به شعاع 8 سانتی‌متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ‌شده را به دست آورید.



۹- مساحت کره‌ای برابر 144π سانتی‌متر مربع است. حجم این کره را بر حسب π به دست آورید.

۱۰- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده 6 محاط شده است، حجم فضای این کره و استوانه چقدر است؟ ($\pi = 3$)

۱۱- شعاع قاعده مخروطی را دو برابر و ارتفاع آن را نصف می‌کنیم، حجم مخروط جدید چند برابر مخروط اولیه است؟

۱۲- با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10 cm ، مخروطی به قطر 8 cm ساخته‌ایم. حجم این مخروط را به دست آورید. ($\pi = 3$)

۱۳- هر یک از عبارتهای داده‌شده در ستون اول را به عبارت مساوی آن در ستون دوم وصل کنید. (یک مورد اضافه است.)

• ارتفاع

• $\frac{2}{3}\pi R^2$

• $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

• a^2

• $6a^2$

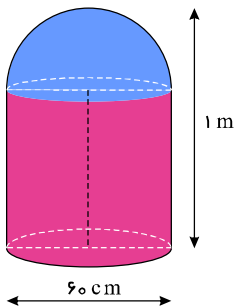
• مساحت کل کره‌ای S است. شعاع آن برابر است با:

• فاصله رأس هرم تا قاعده آن

• حجم نیمکره به شعاع R

• مساحت کل مکعب به ضلع a

۱۴- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به صورت زیر درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول 60 سانتی‌متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.



۱۵- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های 8 cm باشد.

پاسخنامه تشریحی

- ۱

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 12 \times 12 = 48$$

- ۲

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

$$V = \frac{S \times h}{3} = \frac{4 \times 3 \times 10}{3} = 40$$

۳- گزینه ۴ حجم کره از رابطه $\frac{4}{3}\pi R^3$ به دست می‌آید، پس حجم نیم کره برابر می‌شود با:

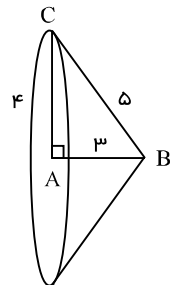
$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

۴- گزینه ۳ از دوران مثلث قائم الزاویه حول ضلع قائمش یک مخروط حاصل می‌شود.

برای اینکه ارتفاع این مخروط را به دست آوریم، از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\overline{AB}^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \overline{AB} = 3$$



حال حجم مخروطی با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} sh = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (3) = 16\pi$$

- ۵

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3 \times 6^3 = 432$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = 3 \times 6^2 \times h = 432$$

$$h = 4$$

- ۶

(الف) (a) درست ✓.

(b) درست ✓

(c) نادرست X

(d) نادرست X

- ۷

حجم آب درون استوانه = حجم آب درون مخروط

$$\frac{1}{3}\pi R_1^2 h = \pi R_2^2 \times x \Rightarrow \frac{1}{3} \times 4^2 \times 12 = 3^2 \times x$$

$$\frac{1}{3} \times 4^2 \times \cancel{12} = 3^2 \times x \rightarrow 4^2 = 3^2 x \rightarrow x = \frac{4^2}{3^2} = \frac{64}{9}$$

آب درون لیوان $\frac{64}{9}$ سانتی متر بالا می آید.

- ۸

$$2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 64 = 192\pi$$

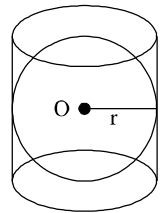
- ۹

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 192\pi \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 4R^2 = 192 \Rightarrow R^2 = 48 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

۱۰ - ابتدا شعاع کره و قاعده استوانه را به دست می آوریم، سپس حجم کره و استوانه را به دست می آوریم:



$$R = \frac{6}{2} = 3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3^3 = 108$$

نکته: ارتفاع استوانه همان قطر کره است: $h = 6$

$$\text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \pi R^2 h = 3 \times 3^2 \times 6 = 162$$

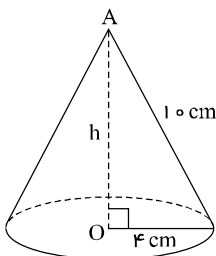
$$162 - 108 = 54 = \text{حجم فضای بین کره و استوانه}$$

۱۱ - h' و r' شعاع و ارتفاع مخروط جدید هستند:

$$\begin{cases} r' = 2r \\ h' = \frac{1}{2}h \end{cases} \rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi r'^2 h'}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{(2r)^2 \times (\frac{1}{2}h)}{r^2 h} = \frac{4r^2 \times \frac{1}{2}h}{r^2 h} = 2$$

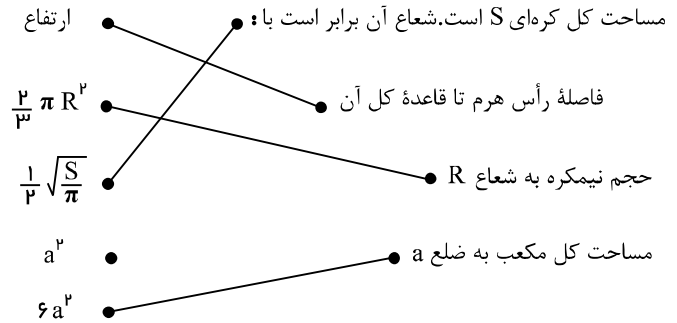
۱۲ - طبق فیثاغورس OA را به دست می آوریم:

$$OA = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$



$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times 8 = 128 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{حجم نیمکره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 &= \frac{2}{3} \pi r^3 \\ S = 4\pi r^2 & \\ r^2 = \frac{S}{4\pi} = \frac{1}{4} \times \frac{S}{\pi} & \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} & \end{aligned}$$



- ۱۴

حجم نیم کره + حجم استوانه = حجم کپسول

$$\text{شعاع قاعده استوانه} = \text{شعاع نیمکره} = 0,3m$$

$$\frac{60cm}{2} = 30cm = 0,3m$$

$$\text{ارتفاع استوانه} = \text{ارتفاع کپسول} - \text{شعاع کره} = 1 - 0,3 = 0,7m$$

$$\text{حجم کپسول} = \pi R^2 h + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

$$\text{حجم کپسول} = \pi \times (0,3)^2 \times 0,7 + \frac{1}{2} \times \pi \times (0,3)^3 = 0,063\pi + 0,018\pi = 0,081\pi \text{ متر مکعب}$$

- ۱۵

بنابر قضیه فیثاغورث داریم:

$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + OM^2$$

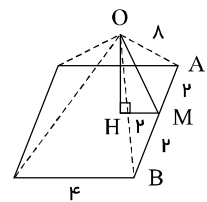
$$\Rightarrow OM^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow 12 = 2^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4^2 \times \sqrt{8} = \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{2} = \frac{32}{3} \sqrt{2} cm^3$$



پاسخنامه کلیدی

۳ - ۴

۴ - ۳